Научная статья
УДК 62-5
EDN NXIFBW
doi 10.34216/2587-6147-2023-4-62-17-23
Андрей Ростиславович Корабельников [1]
Светлана Васильевна Букина [2]
Кирилл Евгеньевич Ширяев [3]
[1,2,3] Костромской государственный университет, г. Кострома, Россия
[1] prostokar@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-4546-7515
[2] tmmbukina@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-2137-7304
[3] shiryaev4@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-5495-6820

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО АГРЕГАТА В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

Аннотация. *В настоящей статье сделана попытка рассмотреть вопрос интегрирования уравнения движения машинного агрегата в общем виде. Приводится вывод аналитических зависимостей, характеризующих механику установившегося движения машинного агрегата. При численном интегрировании дифференциального уравнения движения использован метод последовательных приближений. При определении работы момента сил сопротивления интегрирование проведено для двух случаев – в функции обобщенной координаты и угловой скорости, а также от обобщенной координаты и времени. Определено уравнение механической характеристики электродвигателя исследуемого интервала и значения кинетической энергии звена приведения с точностью второго порядка малости. Последовательно уточняя значение угловой скорости, ее можно вычислить с любой требуемой степенью точности, что позволит более точно рассчитать детали и узлы рычажного механизма на виброустойчивость и снизить напряженность технологического процесса.*
Ключевые слова: *уравнение движения, машинный агрегат, установившееся движение, интегрирование дифференциального уравнения, обобщенная координата, угловая скорость, механические характеристики электродвигателя*

Для цитирования: Корабельников А. Р., Букина С. В., Ширяев К. Е. Численное интегрирование уравнения движения машинного агрегата в установившемся режиме // Технологии и качество. 2023. № 4(62). С. 17–23. https: doi 10.34216/2587-6147-2023-4-62-17-23.

Andrey R. Korabelnikov [1]
Svetlana V. Bukina [2]
Kirill E. Shiryaev [3]
[1,2,3] Kostroma State University, Kostroma, Russia

NUMERICAL INTEGRATION OF THE EQUATION OF MOTION OF A MACHINE UNIT IN STEADY CONDITION

Abstract. *In this article, an attempt is made to consider the question of integrating the equation of motion of a machine unit in a general form. The conclusion of analytical dependencies characterising the mechanics of the steady motion of the machine unit is given. The numerical integration of the differential equation of motion uses the method of successive approximations. When determining the operation of the moment of the resistance forces, integration was carried out for two cases – as a function of the generalised coordinate and angular velocity, as well as from the generalised coordinate and time. The equation of the mechanical characteristics of the electric motor of the studied interval and the kinetic energy values of the reduction link with the accuracy of the second order of smallness is determined. By consistently specifying the value of the* *angular velocity, it can be calculated with any required degree of accuracy, which will allow more accurately calculating the details and components of the lever mechanism for vibration resistance and reducing the intensity of the technological process.*

Keywords: *equation of motion, machine unit, steady motion, integration of differential equation, generalised coordinate, angular velocity, electric motor's mechanical characteristics*

For citation: Korabelnikov A. R., Bukina S. V., Shiryaev K. E. Numerical integration of the equation of motion of a machine unit in steady condition. Technologies & Quality. 2023. No 4(62). P. 17–23. (In Russ.) https: doi 10.34216/2587-6147-2023-4-62-17-23.

Для достижения устойчивости работы машинного агрегата (МА) при расчете любого рычажного механизма требуется вычисление ряда зависимостей, характеризующих механику его установившегося движения. Некоторые методы динамического анализа представлены в работах [1–4], вопросы динамического исследования отдельных механизмов изложены в работе [5].

В общем случае приведенные моменты сил сопротивления технологических машин-автоматов являются функциями обобщенной координаты φ, ее первой производной – $\varphi' = \omega$ и времени t [6].

В промышленности широко распространены технологические машины-автоматы, приведенный момент сопротивления которых зависит от обобщенной координаты и угловой скорости, а также от обобщенной координаты и времени. Вопросы интегрирования уравнения движения машинного агрегата таких машин в литературе освещен слабо.

В настоящей статье сделана попытка рассмотреть вышепоставленный вопрос в общем виде.

При численном интегрировании дифференциального уравнения движения машинного агрегата [6] значения угловой скорости звена приведения ω будем вычислять последовательно, переходя от i к $(i + 1)$.

Для вывода соответствующих формул воспользуемся полученными [7] зависимостями:

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_i} = \frac{\Delta E}{E_i} + \ln I_{\text{пр}\,i} - \ln I_{\text{пр}\,(i+1)}; \qquad (1)$$

$$2\ln(\omega_{i+1} + \Delta\omega^*) = \\ = \ln(E_{i+1} + \Delta E^*) - \ln I_{\text{пр}\,(i+1)} + \ln 2. \qquad (2)$$

Выполнив известные преобразования [7], уравнение (2) представим в виде

$$\frac{2\Delta\omega^*}{\omega_{i+1}} = \frac{\Delta E^*}{E_{i+1}} + \ln E_{i+1} - \ln\frac{I_{\text{пр}\,(i+1)}\omega_{i+1}^2}{2}, \qquad (3)$$

где $\Delta\omega$, $\Delta\omega^*$ и ΔE, ΔE^* – приращение угловой скорости и кинетической энергии при приращении угла поворота звена приведения – $\Delta\varphi$ первого и второго порядка малости соответственно;

ω_i, ω_{i+1}, E_i, E_{i+1}, $I_{\text{пр}\,i}$, $I_{\text{пр}(i+1)}$ – значения угловой скорости, кинетической энергии и приведенного момента инерции на углах поворота звена приведения φ_i, φ_{i+1} соответственно.

В уравнении (3) в выражении $\ln E_{i+1}$ значение кинетической энергии E_{i+1} определяется по уравнению живых сил:

$$E_{i+1} = E_i + \Delta A_{\text{д}} - \Delta A_{\text{с}}, \qquad (4)$$

где $\Delta A_{\text{д}}$, $\Delta A_{\text{с}}$ – работа сил движущих и сопротивления при приращении угла $\Delta\varphi$.

Считая момент сопротивления $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\varphi)$ известным, его работу $A_{\text{с}}(\varphi) = \int M_{\text{с}} d\varphi$ определяем интегрированием кривой $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\varphi)$.

Работу движущей силы $M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\omega)$ так же, как и работу сил сопротивления $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\omega)$ и $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(t)$ в интервале $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, будем определять приближенно, заменив приращение площадей, ограниченных кривыми $M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\omega)$, $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\omega)$ и $M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(t)$, площадями трапеций

$$dA = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} M d\varphi \approx \frac{M_i + M_{i+1}}{2} d\varphi. \qquad (5)$$

Механическую характеристику асинхронного электродвигателя выразим линейным уравнением [8]

$$M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\omega) = a - b\omega. \qquad (6)$$

1. Интегрирование при

$$M_{\text{д}} = M_{\text{д}}(\omega),$$

$$M_{\text{с}} = M_{\text{с}}(\varphi) + M_{\text{с}}(\omega),$$

и $\quad I_{\text{пр}} = I_{\text{пр}}(\varphi) \neq \text{const}$.

Пусть зависимость $M_с = M_с(\omega)$ задана аналитически или в виде графика (рис.).

На угле поворота звена приведения φ_i значение угловой скорости будем считать известной, а следовательно, известно и значение момента сил сопротивления. Зависимость $M_с = M_с(\omega)$ на исследуемом интервале представим линейной функцией.

Для этого в точке с известными координатами M_i , ω_i (см. рис. 1) проводим касательную, определяем угол α_i (между касательной и положительным направлением оси абсцисс) и $\text{tg}\alpha_i = k$.

В координатах M, ω определяем уравнение прямой, проходящей через точку M_i, ω_i и имеющей направление, тангенс угла которого равен k [9]:

$$M - M_i = k(\omega - \omega_i)\,;$$
$$M_с = M_с(\omega) = l - k\omega, \tag{7}$$

где $l = M_i - k\omega_i$.

Аналогично для исследуемого интервала может быть определено и уравнение механической характеристики электродвигателя.

При приращении угла поворота звена приведения $\Delta\varphi$ приращение кинетической энергии ΔE очевидно будет равно

$$\Delta E = \Delta A_д(\omega) - \Delta A_с(\varphi) - \Delta A_с(\omega) = $$
$$= \frac{a - b\omega_i + a - b\omega_{i+1}}{2}\Delta\varphi - $$
$$- \Delta A_с(\varphi) - \frac{l - k\omega_i + l - k\omega_{i+1}}{2}\Delta\varphi\,.$$

Заменив $\omega_{i+1} = \omega_i + \Delta\omega$, получим

$$\Delta E = \Delta A_д(\omega_i) - \Delta A_с(\varphi) - $$
$$- \Delta A_с(\omega_i) + (k - b)\frac{\Delta\varphi}{2}\Delta\omega\,. \tag{8}$$

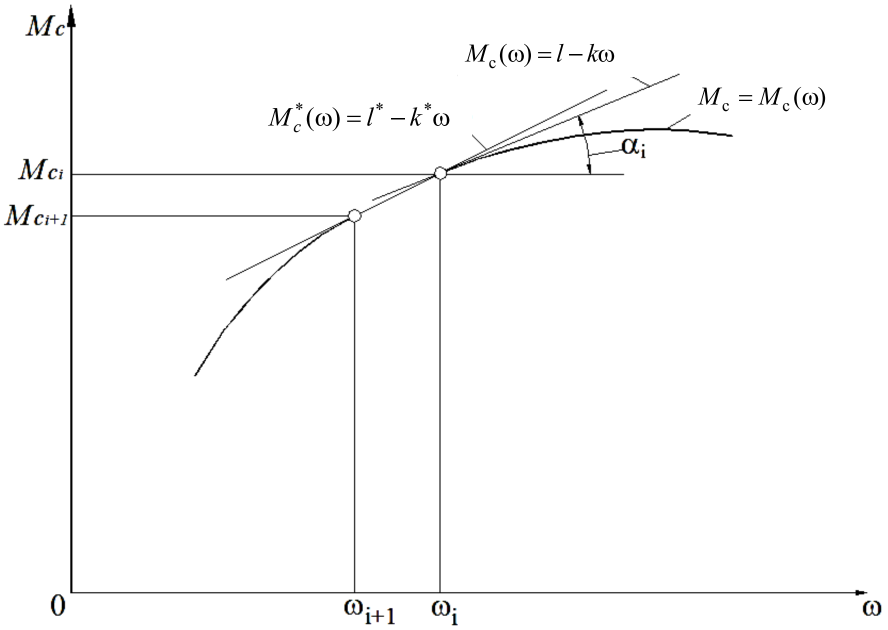

Рис. Зависимость момента сил сопротивления

Подставив уравнение (8) в уравнение (1) и решив последнее относительно $\Delta\omega$, получим

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\omega = 2\frac{\Delta A_д(\omega_i) - \Delta A_с(\varphi) - \Delta A_с(\omega_i) + E_i(\ln I_{\text{пр}\,i} - \ln I_{\text{пр}\,i+1}}{2I_{\text{пр}\,i}\omega_i - (k-b)\Delta\varphi};\\ &\omega_{i+1} = \omega_i + \Delta\omega\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Определив $\Delta\omega$, находим ω_{i+1} и $M_с(\omega_{i+1})$.

Для определения с точностью второго порядка малости угловой скорости ω^*_{i+1} и ее приращения $\Delta\omega^*$ уточним линейное уравнение момента сил сопротивления $M^*_с = M^*_с(\omega)$ и определим приращение кинетической энергии второго порядка малости ΔE^*.

Зная ω_{i+1}^*, по графику определяем значение. Составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки, в координатах M, ω [9]:

$$\frac{M-M_i}{M_{i+1}-M_i}=\frac{\omega-\omega_i}{\omega_{i+1}-\omega_i};$$

$$M_c^*(\omega)=l^*-k^*\omega, \tag{10}$$

где $l^*=M_i-\dfrac{\omega_i}{\Delta\omega}(M_{i+1}-M_i)$;

$k^*=\dfrac{M_{i+1}-M_i}{\Delta\omega}$.

Определим значения кинетической энергии звена приведения E_{i+1} и с точностью второго порядка малости E_{i+1}^* на угле поворота φ_{i+1} по уравнению (4), используя уравнение (5):

$$E_{i+1}=E_i+\frac{M_{\text{д}}(\omega_i)+M_{\text{д}}(\omega_{i+1})}{2}\Delta\varphi-\frac{M_{\text{с}}(\omega_i)+M_{\text{с}}(\omega_{i+1})}{2}\Delta\varphi-\Delta A_{\text{с}}(\varphi);$$

$$E_{i+1}^*=E_i+\frac{M_{\text{д}}(\omega_i)+M_{\text{д}}(\omega_{i+1}^*)}{2}\Delta\varphi-\frac{M_{\text{с}}(\omega_i)+M_{\text{с}}(\omega_{i+1})}{2}\Delta\varphi-\Delta A_{\text{с}}(\varphi);$$

$$\Delta E^*=\left[M_{\text{д}}(\omega_{i+1}^*)-M_{\text{д}}(\omega_{i+1})-M_{\text{с}}(\omega_{i+1}^*)+M_{\text{с}}(\omega_{i+1})\right]\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Подставив в последнее уравнение (6), (10) и $\omega_{i+1}^*=\omega_{i+1}+\Delta\omega^*$, получим

$$\Delta E^*=[l-l^*+(k^*-k)\omega_{i+1}]\frac{\Delta\varphi}{2}+(k-b)\frac{\Delta\varphi}{2}\Delta\omega^*. \tag{11}$$

Подставив уравнение (11) в (3) и решив последнее относительно Δω*, получим

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\omega^*=\frac{2(Б+В\,E_{i+1})\,\omega_{i+1}}{4E_{i+1}-(k^*-b)\Delta\varphi\,\omega_{i+1}};\\&\omega_{i+1}^*=\omega_{i+1}=\Delta\omega^*,\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $Б=\left[l-l^*+(k^*-k)\,\omega_{i+1}\right]\dfrac{\Delta\varphi}{2}$;

$В=\ln\dfrac{2E_{i+1}}{I_{\text{пр.i+1}}\,\omega_{i+1}^2}$.

2. Интегрирование при

$$M_{\text{д}}=M_{\text{д}}(\omega),\ M_{\text{с}}=M_{\text{с}}(\varphi)+M_{\text{с}}(t)\ \text{и}\ I_{\text{пр}}=I_{\text{пр}}(\varphi)\neq\text{const}.$$

Для определения работы момента сил сопротивления $M_{\text{с}}=M_{\text{с}}(t)$ зададимся приращением угла поворота звена приведения. Зная угловую скорость ω_i, определим приращение времени:

$$\Delta t=\frac{\Delta\varphi}{\omega_i};\qquad t_{i+1}=t_1+\Delta t. \tag{13}$$

Зная зависимость $M_с = M_с(t)$, определим приращение кинетической энергии звена приведения при приращении угла $\Delta\varphi$:

$$\Delta E = \Delta A_д(\omega) - \Delta A_с(\varphi) - \Delta A_с(t);$$

$$\Delta E = \frac{a - B\omega_i + a - b\omega_{i+1}}{2}\Delta\varphi - \Delta A_с(\varphi) - \frac{M_с(t_i) + M_с(t_{i+1})}{2}\Delta\varphi .$$

Заменив $\omega_{i+1} = \omega_i + \Delta\omega$, получим

$$\Delta E = \Delta A_д(\omega_i) - \Delta A_с(\varphi) - \frac{1}{2}\Delta A_с(t_i) - \frac{1}{2}\Delta A_с(t_{i+1}) - B\frac{\Delta\varphi}{2}\Delta\omega . \tag{14}$$

Подставим уравнение (14) в (1):

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_i} = \frac{\Gamma - b\dfrac{\Delta\varphi}{2}\Delta\omega}{E_i} + \ln I_{пр\,i} - \ln I_{пр\,i+1} .$$

Решая относительно $\Delta\omega$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\omega = 2\frac{\Gamma + E_i(\ln I_{пр\,i} - \ln I_{пр\,i+1})}{2I_{пр\,i}\omega_i + b\Delta\varphi}; \\ &\omega_{i+1} = \omega_i + \Delta\omega , \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $\Gamma = \Delta A_д(\omega_i) - \Delta A_с(\varphi) - \frac{1}{2}\Delta A_с(t_i) - \frac{1}{2}\Delta A_с(t_{i+1})$.

Для определения приращения угловой скорости с точностью второго порядка малости

а) уточним приращение времени Δt^*:

$$\Delta t^* = \frac{2\Delta\varphi}{\omega_i + \omega_{i+1}};$$

$$t^*_{i+1} = t_{i+1} + \Delta t^*; \tag{16}$$

б) уточним значение момента сопротивления $M_с = M_с(t^*_{i+1})$ и его работы:

$$\Delta A_с(t) = \frac{M_с(t_i) + M_с(t^*_{i+1})}{2}\Delta\varphi;$$

в) определим приращение кинетической энергии второго порядка малости

$$\Delta E^* = E^*_{i+1} - E_{i+1} = \left[E_i + \frac{M_д(\omega_i) + M_д(\omega^*_{i+1})}{2}\Delta\varphi - \Delta A_с(\varphi) - \frac{1}{2}\Delta A_с(t_i) - \frac{1}{2}\Delta A_с(t^*_{i+1})\right] -$$
$$-\left[E_i + \frac{M_д(\omega_i) + M_д(\omega_{i+1})}{2}\Delta\varphi - \Delta A_с(\varphi) - \frac{1}{2}\Delta A_с(t_i) - \frac{1}{2}\Delta A_с(t_{i+1})\right];$$

$$\Delta E^* = \left[M_д(\omega^*_{i+1}) - M_д(\omega_{i+1})\right]\frac{\Delta\varphi}{2} - \left[\Delta A_с(t^*_{i+1}) - \Delta A_с(t_{i+1})\right].$$

Используя уравнение механической характеристики электродвигателя и заменив $\omega_{i+1}^{*}=\omega_{i+1}+\Delta\omega^{*}$, получим

$$\Delta E^{*}=-\frac{b\Delta\varphi}{2}\Delta\omega^{*}-\frac{1}{2}\left[\Delta A_{\text{с}}(t_{i+1}^{*})-\Delta A_{\text{с}}(t_{i+1})\right]. \tag{17}$$

Подставив (17) в (3), имеем

$$\frac{2\Delta\omega^{*}}{\omega_{i+1}}=\frac{Д-\dfrac{b\Delta\varphi}{2}\Delta\omega^{*}}{E_{i+1}}+Ж,$$

где $Д=\frac{1}{2}\left[\Delta A_{\text{с}}(t_{i+1}^{*})-\Delta A_{\text{с}}(t_{i+1})\right]$;

$Ж=\ln\frac{2E_{i+1}}{I_{\text{пр}\,i+1}\omega_{i+1}}$.

Решив относительно $\Delta\omega$*, получим:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\omega^{*}=2\frac{(Д+ЖE_{i+1})\omega_{i+1}}{4E_{i+1}+b\Delta\varphi\omega_{i+1}};\\&\omega_{i+1}^{*}=\omega_{i+1}+\Delta\omega^{*}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Значение E_{i+1} определяется по уравнению живых сил

$$E_{i+1}=E_i+\left[\frac{M_{\text{д}i}+M_{\text{д}i+1}}{2}-\frac{M_{\text{с}}(t_i)+M_{\text{с}}(t_{i+1})}{2}\right]\Delta\varphi-\Delta A_{\text{с}}(\varphi).$$

Последовательно уточняя значение угловой скорости по уравнениям (12) и (18), ее можно вычислить с любой требуемой степенью точности.

ВЫВОДЫ

Рассмотренный подход численного интегрирования уравнения движения машинного агрегата дает возможность определить зависимости, характеризующие механику установившегося движения с любой требуемой степенью точности. Это позволит более точно рассчитать детали и узлы рычажного механизма на виброустойчивость, снизить напряженность технологического процесса и достичь устойчивости работы машинного агрегата.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Романов В. В., Титов С. Н., Лясич В. А. Совершенствование метода динамического анализа ткацкого станка // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. 2010. № 5. С. 84–87.
2. Титов С. Н. Ткацкий станок как колебательная система // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. 2005. № 2. С. 77–80.
3. Букина С. В., Ситникова Т. А. К вопросу определения условий оптимального пуска машинного агрегата // Технологии и качество. 2022. № 3(57). С. 39–41.
4. Букина С. В., Ширяев К. Е. Об аналитическом методе решения уравнения движения машинного агрегата // IV Междунар. Школа-конференция молодых ученых «Нелинейная динамика машин» (School-NDM – 2017) : сборник трудов (Москва, 18–21 апреля 2017 г.). М. : ИМАШ РАН, 2017. С. 207–209.
5. Букина С. В. Динамическое проектирование рычажного механизма кромкообразования ткацкого станка фирмы Dornier с учетом статической характеристики электродвигателя // Вестник Костромского государственного технологического университета. 2015. № 1(34). С. 47–49.
6. Артоболевский И. И. Теория механизмов. М. : Наука, 1965. 766 с.

7. Титарчук А. А. Коэффициент неравномерности и интегрирование уравнения движения машинного агрегата // Известия вузов. Машиностроение. 1972. № 1.
8. Скуридин М. А. Определение движения механизмов по уравнению кинетической энергии при задании сил функции скорости и времени // Труды семинара по ТММ. Т. 12, вып. 45. М. : Изд-во АН СССР, 1951.
9. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М. : Физматгиз, 1958. 783 с.

REFERENCES
1. Romanov V. V., Titov S. N., Lyasich V. A. Improvement of the method of dynamic analysis of the loom. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Series Textile Industry Technology]. 2010;5:84–87. (In Russ.)
2. Titov S. N. The loom as an oscillatory system. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Series Textile Industry Technology]. 2005;2:77–80. (In Russ.)
3. Bukina S. V., Sitnikova T. A. On the issue of determining the conditions for optimal start-up of a machine unit. *Tekhnlogii i kachestvo* [Technologies and Quality]. 2022;3(57):39–41. (In Russ.)
4. Bukina S. V., Shiryaev K. E. On the analytical method for solving the equation of motion of a machine unit. IV International School-Conference of Young scientists "Nonlinear dynamics of machines" – School-NDM 2017: Proceedings (Moscow, April 18-21, 2017). Moscow, IMASH RAS Publ., 2017. P. 207–209. (In Russ.)
5. Bukina S. V. Dynamic design of the lever mechanism of the edge formation of the Dornier loom, taking into account the static characteristics of the electric motor. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta* [Bulletin of Kostroma State Technological University]. 2015;1(34):47–49. (In Russ.)
6. Artobolevsky I. I. Theory of mechanisms. Moscow, Nauka Publ., 1965. 766 p. (In Russ.)
7. Titarchuk A. A. Coefficient of unevenness and integration of the equation of motion of the machine unit*. *Izvestiya vuzov. Seriya mashinostroenie* [Proceedings of Higher educational institutions. Machine building], 1972, No. 1. (In Russ.)
8. Skuridin M. A. Determination of the motion of mechanisms by the kinetic energy equation when setting the forces of the velocity and time function. Proceedings of the seminar on TMM, vol. 12, is. 45. Moscow, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1951. (In Russ.)
9. Vygodsky M. Ya. Handbook of Higher Mathematics. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958. 783 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 20.10.2023
Принята к публикации 22.11.2023

*Перевод названия источника выполнен авторами статьи / Translated by author's of the article.