

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ МАШИНЫ И ОБОРУДОВАНИЕ

Научная статья

УДК 62-57

EDN IYKQZM

doi 10.34216/2587-6147-2023-3-61-23-28

Светлана Васильевна Букина¹

Татьяна Александровна Ситникова²

^{1,2} Костромской государственный университет, г. Кострома, Россия

¹ tmmbukina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2137-7304>

² tatoshic27@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9859-4788>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВЫХ МАСС С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ СИЛ ОТ СКОРОСТИ

Аннотация. В статье рассмотрены рабочие характеристики машин с общим критерием для всех характеристик – одинаковая работа за цикл. Приводится вывод аналитических зависимостей, характеризующих движение электропривода в переходном режиме, т. е. учитывающих влияние различных величин, входящих в уравнение движения, на величину момента инерции маховых масс, при различных видах нагрузки и различных коэффициентах неравномерности вращения. Определены зоны влияния крутизны наклона механической характеристики $M_d(\omega)$ на необходимую величину момента инерции. Показано, что значения момента инерции для агрегатов с плавной нагрузкой меньше, чем для агрегатов с резко меняющейся нагрузкой, и что учет влияния зависимости $M_d(\omega)$ на необходимую величину момента инерции J при больших значениях коэффициента неравномерности движения δ более необходим, чем при малых значениях δ .

Ключевые слова: уравнение движения, машинный агрегат, коэффициент неравномерности движения, момент инерции, крутизна наклона механической характеристики, рабочие характеристики машин, маховик

Для цитирования: Букина С. В., Ситникова Т. А. Определение момента инерции маховых масс с учетом зависимости сил от скорости // Технологии и качество. 2023. № 3(61). С. 23–28. <https://doi.org/10.34216/2587-6147-2023-3-61-23-28>.

Original article

Svetlana V. Bukina¹

Tatiana A. Sitnikova²

^{1,2} Kostroma State University, Kostroma, Russia

DETERMINATION OF THE MOMENT OF INERTIA OF THE FLYWHEEL MASSES, TAKING INTO ACCOUNT THE DEPENDENCE OF FORCES ON SPEED

Abstract. The article discusses the performance characteristics of machines with a common criterion for all characteristics – the same work per cycle. The conclusion of analytical dependences characterising the movement of the electric drive in the transient mode is given, that is, taking into account the influence of various quantities included in the equation of motion on the magnitude of the moment of inertia of the flywheel masses, with different types of load and different coefficients of unevenness of rotation. The zones of influence of the slope steepness of the mechanical characteristic $M_D(\omega)$ on the required value of the moment of inertia are determined. It is shown that the values of the moment of inertia for aggregates with a smooth load are less than for aggregates with a sharply varying load, and that taking into account the influence of the

dependence of $M_D(\omega)$ on the required value of the moment of inertia J at large values of the coefficient of unevenness of motion δ is more necessary than at small values δ .

Keywords: equation of motion, machine unit, coefficient of unevenness of motion, moment of inertia, slope steepness of mechanical characteristics, operating characteristics of machines, flywheel

For citation: Bukina S. V., Sitnikova T. A. Determination of the moment of inertia of the flywheel masses, taking into account the dependence of forces on speed. Technologies & Quality. 2023. No 3(61). P. 23–28. (In Russ.) <https://doi.org/10.34216/2587-6147-2023-3-61-23-28>.

Изучение характера движения электропривода производится при помощи решения уравнения движения и исследования влияния различных величин, входящих в это уравнение, на зависимость момента, частоты вращения от времени, т. е. в переходных режимах. Некоторые методы динамического анализа машинного агрегата с учетом статической характеристики электродвигателя и неравномерности хода представлены в работах [1, 2].

Дифференциальное уравнение движения машинного агрегата имеет вид [2, 3]

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c, \quad (1)$$

где J – момент инерции электропривода, приведенный к валу двигателя, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$,

$J = J_{\max} - (J_{\text{мех}})_{\text{пр}}$;

M_d – момент сил движущих, $\text{Н}\cdot\text{м}$;

M_c – момент сил сопротивления, $\text{Н}\cdot\text{м}$;

J_{\max} – момент инерции маховика, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$;

$J_{\text{мех}}$ – момент инерции механизма, $\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Один из моментов правой части уравнения (1), например M_d , является функцией угловой скорости ω , а другой момент M_c есть периодическая функция угла поворота $M_c(\varphi) = M_c(\varphi + T)$, где T – период.

Так как коэффициент неравномерности вращения δ мал, то мал и диапазон изменения угловой скорости $\Delta\omega = \omega_{\max} - \omega_{\min}$. Вследствие этого можно принять, что момент сил, движущих M_d , изменяется по линейному закону [4, 5]:

$$M_d = A - B\omega. \quad (2)$$

Периодическую функцию угла поворота φ разложим в ряд Фурье:

$$M_c(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^m a_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^m b_n \sin n\varphi. \quad (3)$$

Малость диапазона $\Delta\omega$ позволяет принять $\varphi \approx \omega_{\text{ср}}t$. Подставляя значения M_d и M_c в уравне-

ние (1) и решая его в первом приближении, т. е. при удержании в разложении ряда Фурье только первой гармоники, получим для установившегося режима (при $J = \text{const}$):

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{A - a_0}{B} - \frac{Bb_1 + a_1J\omega_{\text{ср}}}{B^2 + J^2\omega_{\text{ср}}^2} \sin \omega_{\text{ср}}t - \\ &- \frac{Ba_1 - b_1J\omega_{\text{ср}}}{B^2 + J^2\omega_{\text{ср}}^2} \cos \omega_{\text{ср}}t = \\ &= \omega_{\text{ср}} - \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{B^2 + J^2\omega_{\text{ср}}^2}} \sin(\omega_{\text{ср}}t + \beta_1); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\max} &= \omega_{\text{ср}} + \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{B^2 + J^2\omega_{\text{ср}}^2}}; \\ \omega_{\min} &= \omega_{\text{ср}} - \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{B^2 + J^2\omega_{\text{ср}}^2}}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}. \quad (6)$$

Подставляя значения ω_{\max} и ω_{\min} из формулы (5) в формулу (6) и решая уравнение относительно J , получим

$$J = \frac{1}{\delta\omega_{\text{ср}}^2} \sqrt{4(a_1^2 + b_1^2) - (B\delta\omega_{\text{ср}})^2}. \quad (7)$$

Как видно, на необходимую величину момента инерции влияет крутизна наклона характеристики $M_d(\omega)$, выраженная через параметр B .

Для более наглядного представления этого влияния введем безразмерный параметр k (рис. 1а).

$$k = \frac{\omega_{\text{н}}}{\omega_{\text{с}}} = 1 - S,$$

где $\omega_{\text{н}}$ – номинальная угловая скорость ($\omega_{\text{н}} = \omega_{\text{ср}}$);
 $\omega_{\text{с}}$ – синхронная угловая скорость;
 S – скольжение.

$$0 \leq k < 1.$$

Зависимость момента инерции J от крутизны характеристики $M_d(\omega)$, определяемой параметром k , показана на рис. 1б. На этом графике четко видны две зоны:

1-я зона ($0 \leq k < 0,8 \dots 0,9$) – зона практически постоянного момента инерции J . В этой зо-

не учет зависимости $M_d(\omega)$ практически не повлияет на необходимую величину J ;

2-я зона ($0,8 \dots 0,9 \leq k < 1$) – зона резкого влияния крутизны наклона характеристики $M_d(\omega)$ на необходимую величину J .

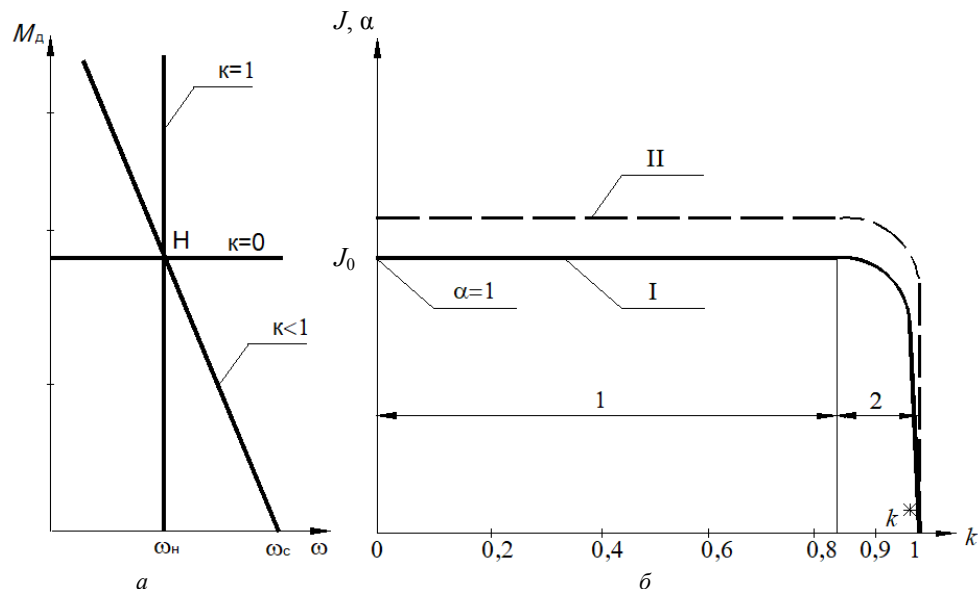


Рис. 1. Крутизна наклона механической характеристики $M_d(\omega)$ (а) и зоны влияния $M_d(\omega)$ на необходимую величину момента инерции (б)

Рассмотрим, как проявляет себя влияние зависимости $M_d(\omega)$ на необходимую величину момента инерции J при различных δ и при различных видах нагрузки M_c . Для этого преобразуем выражение (7), используя зависимость

$$B = \frac{kM_{cp}}{\omega_{cp}(1-k)}. \tag{8}$$

Тогда

$$J = \frac{1}{\delta\omega_{cp}^2} \sqrt{4(a_1^2 + b_1^2) - \left(M_{cp} \frac{\delta k}{1-k}\right)^2} \tag{9}$$

или

$$J = \frac{2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\delta\omega_{cp}^2} \sqrt{1 - \left(\frac{M_{cp}}{2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right)^2 \left(\frac{\delta k}{1-k}\right)^2}. \tag{10}$$

Обозначим

$$\frac{2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{M_{cp}} = \gamma, \tag{11}$$

$$\sqrt{1 - \delta^2 \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{k}{1-k}\right)^2} = \alpha. \tag{12}$$

Тогда

$$J = J_0 \alpha. \tag{13}$$

Все величины в выражении (12) – безразмерные:

δ – характеризует неравномерность вращения;

k – характеризует крутизну наклона зависимости $M_d(\omega)$;

γ – размах колебаний периодической нагрузки по отношению к среднему уровню;

$\frac{2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\delta\omega_{cp}^2} = J_0$ – необходимый момент инерции, подсчитанный для случая, когда M_d не зависит от ω , а M_c изменяется по синусоидальному закону

$$M_c = a_0 + \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin(\omega_{cp}t + \varepsilon_1).$$

Характер функции $\alpha = \alpha(k)$ такой же, как и функции $J = J(k)$.

По формуле (12) были проведены расчеты:

1) при различных коэффициентах неравномерности δ , но при одном и том же типе нагрузки (рис. 2а);

2) при $\delta = \frac{1}{20}$, но при различных типах нагрузки (см. рис. 2б).

Были рассмотрены рабочие характеристики машин (рис. 3) [4, 6] насоса простого дей-

вия 5, насоса двойного действия 6, компрессора 7, пресса 8, 9, а также ступенчатая нагрузка 1, 2, 3 и полусинусоидальная нагрузка 4. Общий критерий для всех характеристик – одинаковая работа за цикл.

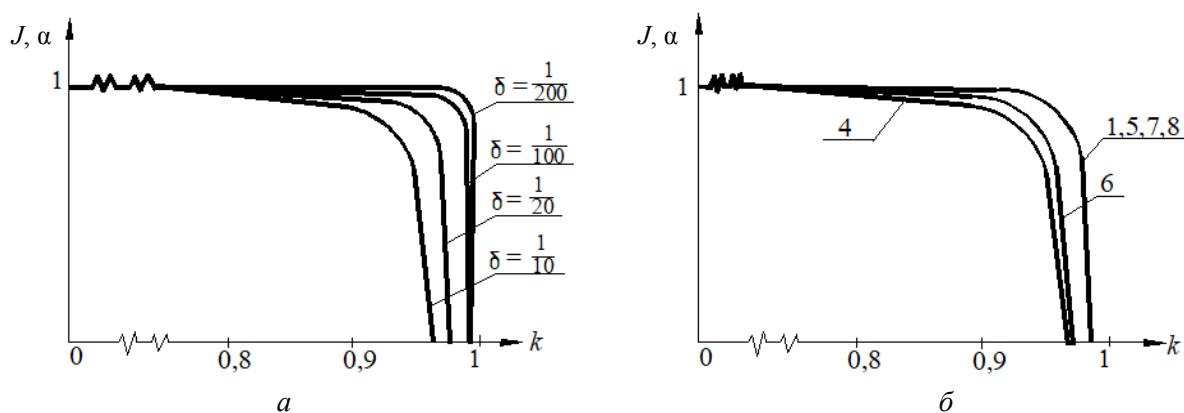


Рис. 2. Крутизна наклона характеристики двигателя:

а – при различных δ , но при одном и том же типе нагрузки; б – при различных типах нагрузки

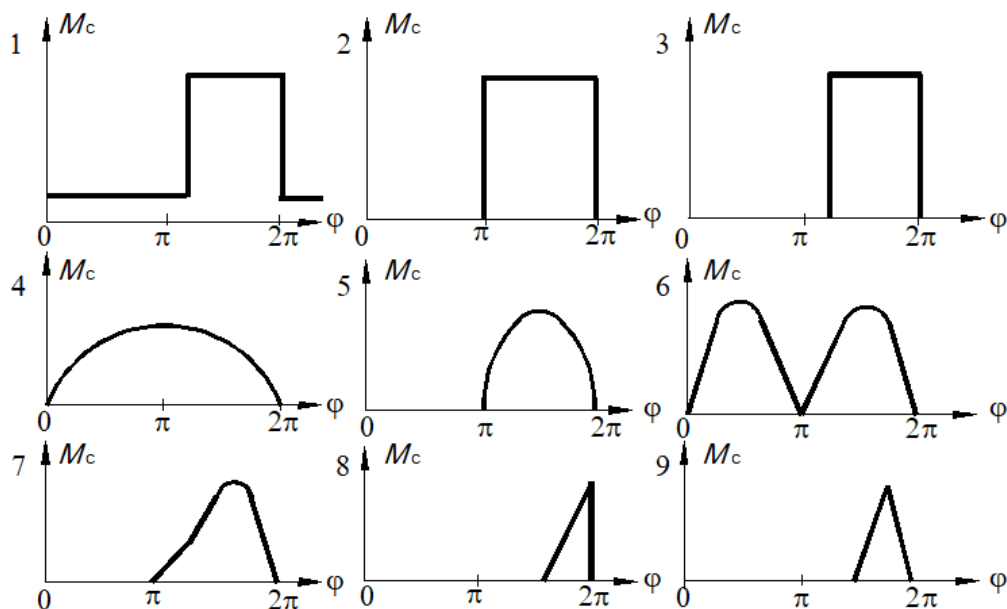


Рис. 3. Рабочие характеристики машин

Сравнение графиков $\alpha = \alpha(k)$ и $J = J(k)$ для рис. 2а ступенчатой нагрузки с разными δ показывает, что при более грубых значениях δ зона 2 (см. рис. 1а) резкого изменения J расширяется,

причем кривые сдвигаются влево. Для $\delta = \frac{1}{20}$

спад начинается при $k \approx 0,9$; для $\delta = \frac{1}{10}$ при

$k \approx 0,8$. Если взять еще большие значения δ и посмотреть, когда начинается спад, т. е. когда начинает проявляться саморегулирование, то для

$\delta = \frac{1}{5}$ спад начинается при $k \approx 0,7$, а для $\delta = \frac{1}{2}$ –

при $k \approx 0,5$. Следовательно, при больших значениях δ спад зависимости $\alpha = \alpha(k)$ или $J = J(k)$ начинается раньше, зона 2 становится шире, а правый ее конец $k = k^*$ (см. рис. 1б) сдвигается

влево. При малых значениях $\delta \left(\frac{1}{100}; \frac{1}{200} \right)$ расширяется зона 1, а зона 2 становится очень уз-

кой. При $\delta = \frac{1}{100}$ зона 2 лежит в пределах

$k = 0,97...0,996$, а для $\delta = \frac{1}{200}$ – $k = 0,98...0,998$.

Отсюда следует, что при больших δ учет влия-

ния зависимости $M_d(\omega)$ на необходимую величину J более необходим, чем при малых δ .

Для различных типов нагрузки [7] характер графика $\alpha = \alpha(k)$ или $J = J(k)$ сохраняется одним и тем же (см. рис. 2б). Но, хотя площадь всех графиков, представленных на рис. 3, т. е. работа за цикл была одинаковой, значения момента инерции J для агрегатов с плавной нагрузкой 4, 6 меньше, чем для агрегатов с резко меняющейся нагрузкой 1, 2, 3, 7, 8, 9. Для агрегатов с плавной нагрузкой зона 2 несколько шире, чем для импульсных. Для плавных нагрузок спад зависимости $\alpha(k)$ идет постепенно по всей ширине зоны 2 (см. рис. 2б), а для импульсных нагрузок наиболее резкий спад происходит вблизи правой границы зоны 2 (см. рис. 2б).

Если в зависимости $M_c(\varphi)$ определяющей является гармоника n -го порядка, а не первого, то в более общем виде формулу (7) можно записать следующим образом:

$$J = \frac{1}{n\delta\omega_{cp}^2} \sqrt{4(a_1^2 + b_1^2) - (B\delta\omega_{cp})^2}, \quad (14)$$

где n – порядок той гармоники, которая в каждом конкретном случае является наиболее влияющей.

Рассмотрим второе приближение, т. е. учтем в функции $M_c = M_c(\varphi)$ в уравнении (3) также и члены с двойной частотой $2\omega_{cp}t$. Тогда после решения уравнения (1) получим

$$\begin{aligned} \omega = \omega_{cp} - \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{B^2 + J^2\omega_{cp}^2}} \sin(\omega_{cp}t + \beta_1) - \\ - \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{B^2 + 4J^2\omega_{cp}^2}} \sin(2\omega_{cp}t + \beta_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Из выражения (15) необходимо найти J . Для этого нужно определить ω_{max} и ω_{min} , подставить их в выражение (6) и решить его относительно J .

Однако при решении во втором приближении $\omega(t)$ представляет собой не простое колебание, а сумму двух колебаний с разными частотами. Теория колебаний не дает способа определения амплитуд суммарного колебания по известной зависимости $\omega(t)$. Поэтому сделаем упрощение – подсчет необходимого значения момента инерции J был произведен для предельного случая, когда условно было положено, что экстремумы обеих составляющих колебаний наступают одновременно [5]. Тогда для второго приближения

$$\begin{aligned} \omega_{max II} = \omega_{cp} + \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{B^2 + J^2\omega_{cp}^2}} + \\ + \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{B^2 + 4J^2\omega_{cp}^2}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \omega_{min II} = \omega_{cp} - \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{B^2 + J^2\omega_{cp}^2}} - \\ - \sqrt{\frac{a_2^2 + b_2^2}{B^2 + 4J^2\omega_{cp}^2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

После подстановок $\omega_{max II}$ и $\omega_{min II}$ в уравнение (6) и соответствующих преобразований получим

$$N_8 J^8 + N_6 J^6 + N_4 J^4 + N_2 J^2 + N_0 = 0,$$

где N_0, N_2, N_4, N_6, N_8 – коэффициенты, зависящие от δ, ω_{cp} , параметров A и B , параметров рабочей машины a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 .

Уравнение сводится к уравнению четвертой степени, которое было решено для различных коэффициентов наклона $M_d(\omega)$. На основании этих решений построен график второго приближения II (см. рис. 1б, пунктирная линия). Значения второго приближения II отличны от значений первого приближения I, но характер графика – наличие двух зон – остается прежним. При удержании в моменте сопротивления членов более высоких частот для определения J уравнение получается еще более высоких порядков. Из сказанного следует, что уже второе приближение чрезвычайно осложняет расчет, а более высокие частоты делают его трудновыполнимым.

ВЫВОДЫ

1. На необходимую величину момента инерции влияет крутизна наклона характеристики, а учет влияния зависимости $M_d(\omega)$ на необходимую величину момента инерции J_0 при больших значениях коэффициента неравномерности движения δ более необходим, чем при малых δ .

2. Для уменьшения неравномерности движения можно либо увеличивать крутизну механической характеристики двигателя, либо также увеличивать постоянную составляющую приведенного момента инерции массы J_0 . Увеличивать крутизну характеристики двигателя за счет увеличения его мощности не всегда рационально. Увеличивать J_0 можно установкой

дополнительной массы – маховика. Место установки маховика выбирается так, чтобы привод был защищен от источников возмущений. Например, когда источником возмущений является исполнительный механизм, тогда маховик целесообразно устанавливать на входном валу. Однако, если скорость такого вала мала, то при

заданном допустимом $[\delta]$ может потребоваться большая масса маховика.

3. Проведенные исследования могут позволить обоснованно рекомендовать способы повышения равномерности движения рабочих органов машины в зависимости от типа машины и реальных характеристик привода.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Букина С. В., Ситникова Т. А. К вопросу определения условий оптимального пуска машинного агрегата // Технологии и качество. 2022. № 3(57). С. 39–41.
2. Букина С. В., Ширяев К. Е. Об аналитическом методе решения уравнения движения машинного агрегата // IV Международная Школа-конференция молодых ученых «Нелинейная динамика машин» – School-NDM 2017 : сборник трудов (Москва, 18–21 апреля 2017 г.). М. : ИМАШ РАН, 2017. С. 207–209.
3. Коловский М. З. Динамика машин. Л. : Машиностроение, 1989. 263 с.
4. Приводные системы ткацких станков / под ред. И. А. Мартынова. М. : Легпромиздат, 1991. 272 с.
5. Зиновьев Г. С. Силовая электроника. 5-е изд. М. : Юрайт, 2015. 668 с.
6. Зиновьев Г. С. Основы силовой электроники : учеб.-метод. пособие. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2018. 39 с.
7. Динамический анализ и синтез машинного агрегата с примерами привода ткацких машин : учеб. пособие / В. А. Лясич, А. П. Болотный, Ю. В. Кулемкин, С. В. Букина, С. Ф. Герасимова. Кострома : Изд-во Костром. гос. технол. ун-та, 2009. 40 с.

REFERENCES

1. Bukina S. V., Sitnikova T. A. On the issue of determining the conditions for optimal start-up of a machine unit*. *Tekhnologii i kachestvo* [Technologies and quality]. 2022;3(57):39–41. (In Russ.)
2. Bukina S. V., Shiryayev K. E. On the analytical method for solving the equation of motion of a machine unit. *IV Mezhdunarodnaya Shkola-konferenciya molodyh uchenykh «Nelinejnaya dinamika mashin» – School-NDM 2017 : sbornik trudov (Moskva, 18–21 aprelya 2017 g.)* [IV International School-Conference of Young scientists “Nonlinear dynamics of machines” – School-NDM 2017. Proceedings (Moscow, April 18–21, 2017)]. Moscow, IMASH RAN Publ., 2017, pp. 207–209. (In Russ.)
3. Kolovsky M. Z. Dynamics of machines. Leningrad : Mashinostroenie Publ., 1989. 263 p. (In Russ.)
4. Martynov I. A. (ed.). Drive systems of looms. Moscow, Legpromizdat Publ., 1991. 272 p. (In Russ.)
5. Zinoviev G. S. Power electronics. 5th ed. Moscow, Yurayt Publ., 2015. 668 p. (In Russ.)
6. Zinoviev G. S. Fundamentals of power electronics: an educational and methodical manual. Novosibirsk, Novosibirsk St. Tech. Univ. Publ., 2018. 39 p. (In Russ.)
7. Lyasich V. A., Bolotny A. P., Kulemkin Yu. V., Bukina S. V., Gerasimova S. F. Dynamic analysis and synthesis of a machine unit with examples of a weaving machine drive. Kostroma, Kostroma St. Technol. Univ. Publ., 2009. 40 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 16.06.2023
Принята к публикации 8.09.2023

* Перевод названия источника выполнен авторами статьи / Translated by author's of the article.